Adı Soyadı: **27.11.2022**

Numara: CEVAP ANAHTARI

MAT 101 ANALİZ I DERSİ ARA SINAV SORULARI

1) $x \neq 1$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

eşitliğini doğrulayınız (15 puan).

2) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{[\![x]\!]^2 - 9}}\right)$ biçiminde verilen f fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz (15 puan).

3) Herhangi bir reel sayı dizisi sınırlı ise yakınsaktır ifadesi doğru ise ispat ediniz, yanlış ise bir ters örnek veriniz (10 puan).

4) Aşağıda verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz (20 puan).

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2+1}}{|x| - x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2^x)}$

5) Aşağıda verilen bağıntıların $y = f(x)$ biçiminde fonksiyonlar olup olmadığını araştırınız (20 puan).

a) $\beta_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq y+1\right\}$ **b)** $\beta_2 = \left\{(x,y) \,\middle|\, x = |y|,\ x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ y \in \mathbb{R}\right\}$

6) $6\cos x - (\sin x)^2 + 6 = 0$ denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığındaki çözümlerini bulunuz (10 puan).

7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ fonksiyonu veriliyor. Bu f fonksiyonu birebir ve örten olacak şekilde fonksiyonun tanım ve değer kümelerini uygun kümelere kısıtlayarak tersini bulunuz (10 puan).

Not: 4. ve 5. sorudaki her şık 10 puandır. Süre 90 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

1) Eşitliğin doğruluğunu tümevarımla gösterelim. $x \neq 1$ olsun

$n=1$ olsun. $1+x = \dfrac{1-x^2}{1-x} \Rightarrow 1+x = 1+x$

olup eşitlik doğru olur.

n için eşitlik doğru olsun. Yani

$$1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \dots (1)$$

olsun. $n+1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Yani

$1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1} = \dfrac{1-x^{n+2}}{1-x}$ olduğunu gösterelim. (1) kullanılarak

$$\begin{aligned} 1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $n+1$ için eşitlik doğrudur. Bu takdirde tümevarım prensibinden eşitlik $\forall n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

2) f nin tanım kümesini bulalım. f nin tanımlanabilmesi için

$[\![x]\!]^2 - 9 > 0$ olmalıdır. Burada $[\![x]\!] = a$ denirse

$a^2 - 9 > 0 \iff (a-3)(a+3) > 0$

olur. İşaret tablosu yapılırsa

a	$-\infty$		-3		$+3$		$+\infty$
a^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ bulunur. $[\![x]\!] = a$ olduğundan

$$\begin{aligned} [\![x]\!] < -3 \ \vee\ [\![x]\!] > 3 &\iff x < -3 \ \vee\ x \geq 4 \\ &\iff x \in (-\infty, -3) \cup [4, +\infty) \end{aligned}$$

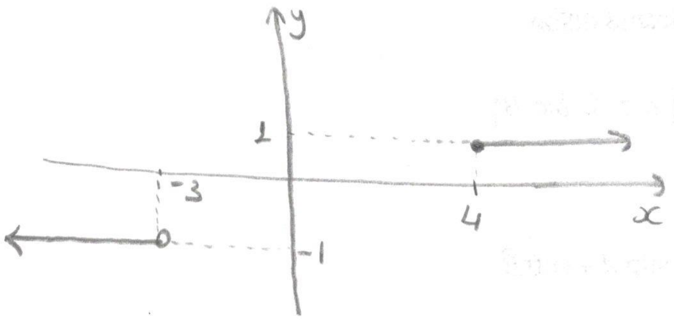
olur. O halde f nin tanım kümesi $(-\infty, -3) \cup [4, +\infty)$ bulunur.

$x < -3$ iken $x-2 < 0$, $\sqrt{[\![x]\!]^2-9} > 0$ olduğundan $\operatorname{sgn}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{[\![x]\!]^2-9}}\right) = -1$ olur.

2. cevabın devamı)

$x \geq 4$ iken $x-2 > 0$, $\sqrt{[\![x]\!]^2-9} > 0$ olduğundan $\operatorname{sgn}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{[\![x]\!]^2-9}}\right) = 1$

bulunur. O halde f nin grafiği



biçimindedir

3) İfade yanlıştır. Bir ters örnek verelim. $(a_n) = ((-1)^n)$ dizisini alalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leq a_n \leq 1$ olduğundan (a_n) dizisi sınırlıdır. Ancak $(a_n) = ((-1)^n)$ ıraksak bir dizidir.

4) a) $f_1(x) = \sqrt{-x^2+1}$, $f_2(x) = |x| - x$ denirse $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ olur.

f_1 için $-x^2+1 \geq 0 \iff x^2-1 \leq 0$ olmalıdır. İşaret tablosu yapalım.

x	$-\infty$	-1		$+1$	$+\infty$
	+	0	−	0	+

$x \in [-1, 1]$ olur. O halde $D_{f_1} = [-1, 1]$ dir.

$D_{f_2} = \mathbb{R}$ dir. Şimdi $\{x \in \mathbb{R} \mid f_2(x) = 0\}$ kümesini bulalım.

$|x| - x = 0 \iff |x| = x \iff x \geq 0$

olduğundan $\{x \in \mathbb{R} \mid f_2(x) = 0\} = [0, +\infty)$ olur. f nin tanım kümesi D_f olmak üzere

$$
\begin{aligned}
D_f &= (D_{f_1} \cap D_{f_2}) \setminus \{x \in D_{f_2} \mid f_2(x) = 0\} \\
&= ([-1,1] \cap \mathbb{R}) \setminus [0, +\infty) \\
&= [-1, 1] \setminus [0, +\infty) \\
&= [-1, 0)
\end{aligned}
$$

bulunur.

4) b) Öncelikle $\arcsin(\log_2^x) \geq 0$ olmalıdır.

$\arcsin(\log_2^x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \log_2^x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$

olur. I) $1 \leq x \leq 2$ olmalıdır.

$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ olduğundan $-1 \leq \log_2^x \leq 1$ olmalıdır.

$-1 \leq \log_2^x \leq 1 \Leftrightarrow 2^{-1} \leq x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2$ olur.

II) $+\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ olmalıdır.

Son olarak logaritma fonksiyonunun tanımından III) $x > 0$ olmalıdır.

I, II ve III durumları birlikte sağlandığında

$[1,2] \cap [+\frac{1}{2}, 2] \cap (0, +\infty) = [1,2]$

olur. f nin tanım kümesi D_f olmak üzere $D_f = [1,2]$ dir.

5) a) $x = 3$ olsun. $3 \geq y+1 \Leftrightarrow 2 \geq y$ olur.

$y = 2$, $y = 1$ olabilir. O halde $(3,2) \in \beta_1$, $(3,1) \in \beta_2$ iken $2 \neq 1$

olur. Bu takdirde f bir fonksiyon değildir.

b) $x = 1$ olsun. $1 = |y| \Leftrightarrow y = \mp 1$ olur. O halde

$(1,-1) \in \beta_2$, $(1,1) \in \beta_2$ iken $-1 \neq 1$ olur. Bu takdirde f bir fonksiyon değildir.

6) $6\cos x - \sin^2 x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6\cos x - (1 - \cos^2 x) + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 6\cos x + \cos^2 x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + 6\cos x + 5 = 0$

olur. $\cos x = a$ denirse

$a^2 + 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow (a+5)(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = -1,\ a = -5$

olur. $\cos x \in [-1, 1]$ olduğundan $\cos x \neq -5$ dir.

$\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \cos \pi$

$\Leftrightarrow x = k\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

olur. $[0, 2\pi)$ aralığındaki çözüm $x = \pi$ dir.

7) $y=x^2+2x-3 \Leftrightarrow y=x^2+2x+1-1-3$

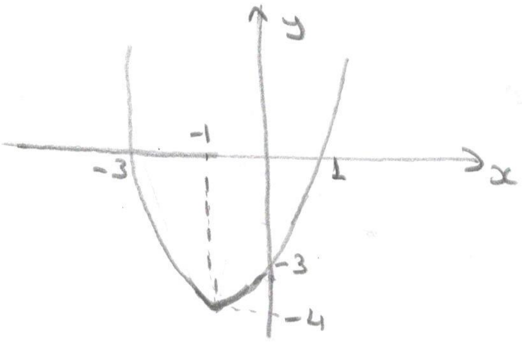
$\Leftrightarrow y=(x+1)^2-4$

olup parabolün tepe noktası $(-1,-4)$ olur. Yine $x=0$ ise $y=-3$

$y=0$ ise $x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow x=-3,\ x=1$

$$\begin{array}{cc} x & 3 \\ x & -1 \end{array}$$

olup $(0,-3)$, $(-3,0)$ ve $(1,0)$ noktalarından geçer parabolü çizelim.



olur. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq -4$ olduğundan f örten değildir. $f(1)=0=f(-3)$ ve $1 \neq -3$ olduğundan f birebir değildir. Eğer tanım kümesi $[-1,+\infty)$ alınırsa fonksiyon birebir, değer kümesi $[-4,+\infty)$ alınırsa fonksiyon örten olur. O halde tersi vardır.

$g: [-1,+\infty) \longrightarrow [-4,+\infty)$, $g(x)=x^2+2x-3$ fonksiyonunun g^{-1} tersini bulalım.

$x^2+2x-3=y \Leftrightarrow y=(x+1)^2-4$

$\Leftrightarrow y+4=(x+1)^2$

$\Leftrightarrow -1 \mp \sqrt{y+4}=x$

olur. $x \geq -1$ olduğundan $x=-1+\sqrt{y+4}$ olur. O halde

g fonksiyonunun tersi $g^{-1}(x)=-1+\sqrt{x+4}$ olarak bulunur.